## Lokalna gra

**Słowa kluczowe:** poset, online

**Prezentujący:** Bartłomiej Bosek
*Afiliacja:* Jagiellonian University
*Email:* `bosek@tcs.uj.edu.pl`

**Problem.**

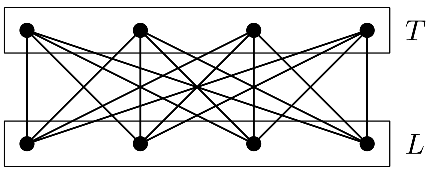
Lokalna gra rozgrywa się pomiędzy Prezenterem a Algorytmem na strukturze $(L, T, \leqslant, c)$, gdzie:

- $(L, T, \leqslant)$ jest *regularnym dwudzielnym* zbiorem częściowo uporządkowanym, to znaczy:
  - $(L \cup T, \leqslant)$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym,
  - $L, T$ są rozłącznymi antyłańcuchami, gdzie dla dowolnego $l \in L$ istnieje $t \in T$, taki że $l < t$ (zapisujemy to $L \sqsubset T$),
  - $|L| = |T| = width(L \cup T)$, czyli jest równe rozmiarowi najliczniejszego antyłańcucha w $L \cup T$;
- ponadto $(L, T, \leqslant)$ jest *rdzeniem*, czyli zbiór krawędzi digrafu $(L, T, \prec)$ jest sumą skojarzeń doskonałych pomiędzy $L$ a $T$;
- $c : L \cup T \longrightarrow \mathscr{P}_+(\Gamma)$ jest *multikolorowaniem*, czyli wierzchołki na których występuje dany kolor tworzą łańcuch, gdzie $\Gamma$ jest skończonym zbiorem kolorów ustalonym przez Algorytm podczas pierwszej tury.

Dla multikolorowania $c : P \longrightarrow \mathscr{P}_+(\Gamma)$ oraz $X \subseteq P$ będziemy zamiast $\bigcup_{x \in X} c(x)$ pisać po prostu $c(X)$.

Podczas pierwszej tury:

- Prezenter ustawia naturalną liczbę $w$ i przedstawia dwa antyłańcuchy $L, T$, każdy po $w$ elementów, gdzie każdy element z $T$ jest nad każdym elementem z $L$, czyli $L < T$.
- Algorytm deklaruje skończony zbiór kolorów $\Gamma$ (które będzie mógł używać w trakcie gry) i multikoloruje każdy punkt $x \in L \cup T$ za pomocą niepustego podzbioru $c(x)$ zbioru $\Gamma$ w taki sposób, że dla każdego $\gamma \in \Gamma$ punkty pokolorowane za pomocą $\gamma$ tworzą łańcuch.

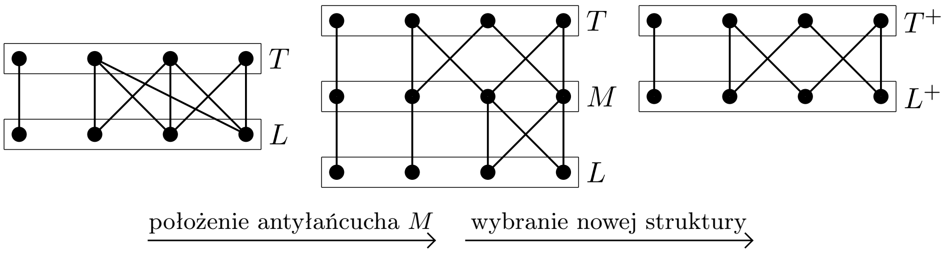



Rysunek 1. Częściowy porządek zaprezentowany przez Prezentera dla $w = 4$.

Każda kolejna tura polega na tym, że struktura $(L, T, \leqslant, c)$ z poprzedniej tury jest przekształcana w strukturę $(L^+, T^+, \leqslant, c^+)$ zgodnie z następującymi zasadami:

- Prezenter wprowadza $w$ nowych punktów tworzących antyłańcuch $M$ takich, że:
  - zbiór częściowo uporządkowany $\mathcal{B}' = (L \cup M \cup T, \leqslant)$ ma szerokość $w$,
  - $L \sqsubset M \sqsubset T$ w $\mathcal{B}'$,
  - oba $(L, M, \leqslant)$ oraz $(M, T, \leqslant)$ tworzą rdzenie.
- Algorytm koloruje każdy punkt $m \in M$ za pomocą niepustego zbioru kolorów $c^+(m) \subseteq c(L) \cap c(T)$ zachowując stare multikolorowanie na $L \cup T$, tzn. $c^+|_{L \cup T} = c$. Innymi słowy każdy wierzchołek $m \in M$ może być pokolorowany tymi kolorami, które występują na wierzchołkach $l \in L$ i $t \in T$ takich, że $l < m < t$.
- Ostatecznie Prezenter przedefiniuje poziomy $L, T$ na $L^+, T^+$ tak, że albo $(L^+, T^+) = (L, M)$ albo $(L^+, T^+) = (M, T)$. To w restrykcji do $L^+ \cup T^+$ daje nową strukturę $(L^+, T^+, \leqslant, c^+)$.

Rysunek 2 przedstawia przykład ruchu Prezentera dla $w = 4$. Najpierw Prezenter wprowadza antyłańcuch $M$ złożony z 4 nowych punktów. Następnie Algorytm koloruje nowe punkty, po czym Prezenter wybiera $(M, T)$ jako nowe $(L^+, T^+)$.




RYSUNEK 2.

Celem Algorytmu jest zadeklarowanie jak najmniejszej liczby $|\Gamma|$ kolorów podczas pierwszej tury tak, aby móc grać bez końca. Jeżeli ta liczba byłaby za mała, to Prezenter może przeszkodzić jego celowi, czyli doprowadzić do stworzenia częściowego porządku $\mathcal{B}'$ którego nie da się pokolorować za pomocą $\Gamma$ zgodnie zasadami gry.

Wiadomo, że dla $w = 2$ wystarczą 4 kolory, zaś dla $w = 3$ wystarczy 11 kolorów [Bos08]. Dla $w \geqslant 4$ nie są znane żadne górne ograniczenia.

**Problem 1.** *Określić najmniejszą liczbę kolorów dla danej liczby $w$ dla której Algorytm może grać nieskończenie długo. Czy ta liczba jest skończona?*

Znalezienie wielomianowego oszacowania w zależności od $w$ w problemie lokalnej gry dałoby wielomianowe oszacowanie na problem *pokrycia łańcuchowego online*. Dla problemu pokrycia łańcuchowego online Bosek i Krawczyk pokazali oszacowanie z góry równe $w^{16 \log w}$ [BK10], zaś najlepsze znane oszacowanie dla tego problemu jest dane przez B. Boska, H. A. Kiersteada, T. Krawczyka, G. Mateckiego, i M. Smitha równe $w^{6.5 \log w}$.

Formalne definicje oraz związek pomiędzy lokalną grą, a problemem pokrycia łańcuchowego online można znaleźć w [Bos08].

## LITERATURA


[BK10] Bartłomiej Bosek and Tomasz Krawczyk. The sub-exponential upper bound for on-line chain partitioning (extended abstract). In *2010 IEEE 51st Annual Symposium on Foundations of Computer Science FOCS 2010*, pages 347–354. IEEE Computer Soc., Los Alamitos, CA, 2010. `http://www.computer.org/csdl/proceedings/focs/2010/4244/00/4244a347-abs.html`.

[BK15] Bartłomiej Bosek and Tomasz Krawczyk. A subexponential upper bound for on-line chain partitioning problem, 2015. `http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs00493-014-2908-7`.

[Bos08] Bartłomiej Bosek. *On-line Chain Partitioning Approach to Scheduling.* PhD thesis, Jagiellonian University, 2008. `http://tcs.uj.edu.pl/docs.php?id=29`.