Grafy skierowane bez tranzytywnego turnieju

Prezentujący: Andrzej Grzesik
Afiliacja: Jagiellonian University
Email: `grzesik@tcs.uj.edu.pl`

Autorzy: Andrew Treglown

Problem.

Jeśli z każdego wierzchołka grafu (nieskierowanego) wychodzi więcej niż $n/2$ krawędzi, to graf ma trójkąt. To już wiadomo od 1907 roku (twierdzenie Mantela). Uogólnienie mówiące, że jeśli z każdego wierzchołka wychodzi więcej niż $\left(1 - \frac{1}{k-1}\right) n$ krawędzi, to graf posiada graf pełny na k wierzchołkach jest znane od 1941 (twierdzenie Turána). Można je sobie spróbować udowodnić. Pięć dowodów jest w *Dowodach z Księgi*.

Naturalnym uogólnieniem tego na grafy skierowane (bez pętli i krawędzi w obie strony) jest pytanie o stopień wejścia i wyjścia, który wymusza pojawianie się pełnego turnieju tranzytywnego (tzn. wszystkie krawędzie i nie ma cykli). Łatwo zauważyć, że jeśli w grafie skierowanym, każdy wierzchołek ma stopień wyjścia oraz stopień wejścia większy niż $\frac{1}{3}n$, to posiada tranzytywny trójkąt. Co więcej stała $\frac{1}{3}$ jest najlepsza z możliwych — da się ją osiągnąć biorąc „rozdmuchany trójkąt" (trzy grupy po $n/3$ wierzchołków, bez krawędzi wewnątrz grupy i z wszystkimi krawędziami pomiędzy grupami, jak w trójkącie).

Takie samo pytanie można zadań dla większych tranzytywnych turniejów i okazuje się, że jest otwarte. I to nie dlatego, że jest trudne, ale dlatego, że o dziwo, mimo prostego sformułowania, zadał je dopiero w 2010 roku Andrew Treglown w pracy dostępnej na stronie `http://web.mat.bham.ac.uk/~treglowa/orientednote.pdf` zainspirowany pracą magisterską Payama Valadkhana.

Co można zrobić w tym problemie?

Po pierwsze konstrukcje, które pokażą jakieś stałe i pozwolą sformułować hipotezę. To wydaje się być w zasięgu, gdyż takie grafy powinny być dość mocno regularne, najprawdopodobniej będące właśnie takimi „rozdmuchanymi" konstrukcjami. Samo znalezienie tych grafów będzie ograniczeniem dolnym, i już będzie fajną rzeczą.

Po drugie, można udowodnić ograniczenia górne — dla konkretnych k lub ogólne. Na pewno jakieś ograniczenia można udowodnić korzystając z prostych metod, np. indukcji. Możliwe też, że udowodnione tak ograniczenia będą takie jak wynikające z konstrukcji, co całkowicie rozwiąże problem. Tak jest w przypadku nieskierowanym i Twierdzenia Turána. Tutaj dowód chociażby dla $k = 4$ będzie ciekawym wynikiem. Jeśli się tak nie uda, to można też użyć nowej mocnej metody algebr flagowych opracowanej przez Razborova, która sprowadza szukanie takiego ograniczenia do zapuszczenia programu półdodatniookreślonego (semidefinite programming). Bez wnikania w szczegóły metody, zapuszczając obliczenia dostanie się jakieś ograniczenia, i jeśli one będą równe tym z konstrukcji to rozwiąże się problem, a jeśli nie, to mogą dać wskazówki jak poprawić konstrukcje.