Kolorowanie hipergrafów i gry w przesuwanie żetonów

Prezentujący: Jakub Kozik
Afiliacja: Jagiellonian University
Email: Jakub.Kozik@uj.edu.pl

Problem.

Najprostszy wariant gry w przesuwanie żetonów przebiega następująco. Plansza składa się z dwóch skierowanych ścieżek o długości $n+1$ każda. Na początku każdej z nich leży N żetonów. W kolejnych turach pierwszy z graczy (Pusher) wybiera po jednym żetonie z każdej ścieżki i przesuwa je o jedno pole do przodu. Drugi gracz (Remover) może w tym momencie zdjąć z planszy jeden z przesuniętych żetonów. Pusher wygrywa jeśli jakiś żeton znajdzie się na końcu ścieżki. Podstawowe pytanie, które możemy zadać, to jak duże musi być N aby Pusher miał strategię wgrywającą?

Grę można uogólniać w wielu kierunkach modelując w ten sposób różne problemy kolorowania on-line. Możemy na przykład zwiększyć liczbę ścieżek po których wędrują żetonów. Inne uogólnienie polega na zwiększeniu liczby żetonów, które Pusher może poruszyć w jednym ruchu. Remover wtedy może zdjąć wszystkie żetonów z wybranej ścieżki, które właśnie się ruszyły lub, w innej wersji, przesunięte żetony z wszystkich scieżek poza jedną.

Gra rozgrywana na k ścieżkach, w której Pusher może przesunąć dowolny zbiór żetonów, a Remover zdjąć poruszone żetony z wybranych $k-1$ ścieżek, modeluje k-kolorowanie on-line n-jednorodnych hipergrafów (n-grafów). Niech $m_k^{OL}(n)$ będzie minimalną liczbą żetonów które pozwalają Pusherowi wygrać taką grę na k ścieżkach o długości n. Łatwo przekonać się że:

$$m_k^{OL}(n) = \Omega(k^n).$$

Klasyczne konstrukcje małych n-grafów, które nie są k-kolorowalne dają:

$$m_k^{OL}(n) = O(n^2k^n).$$

Dla $k = 2$ potrafimy pokazać ograniecznie górne rzędu nk^n. Dla $k \geq 3$, wciąż najlepsze górne ogranieczenie wynika z off-line'owych konstrukcji. *Czy dolne ograniczenia są ścisłe? Górne raczej nie są. Jak je poprawić?*

Rozważmy grę rozgrywaną na r ścieżkach w których na początku każdej ze ścieżek leżą 3 żetony. Pytanie teraz brzmi jak długie muszą być ścieżki aby Remover miał strategię wygrywającą? Wiadomo że dla $n > 3/2 \cdot r$ wygrywa Remover oraz że dla $n < 4/3 \cdot r$ wygra Pusher. Ten wariant gry odpowiada kolorowaniu z list on-line grafów r-dzielnych o częściach wielkości 3. Tutaj dolne ograniczenie na długość ścieżki wynika z podawania grafu, który nawet off-line nie jest kolorowalny z list długości $4/3 \cdot r$. *Ile wynosi graniczna wartość n? Jaka jest graniczna wartość n dla gry w której Pusher może poruszyć co najwyżej jeden żeton na każdej ze ścieżek?*