

Gry ramseyowskie na grafach planarnych

Słowa kluczowe: online Ramsey games

Prezentujący: Tomasz Krawczyk

Autorzy: J. Grytczuk, M. Hałuszczak, H. Kierstead, Sarka Petričková

Problem. Rozważmy następującą grę w wymuszanie grafu G , rozgrywaną pomiędzy dwoma graczami: *Prezenterem* i *Malarzem*. W trakcie gry Prezenter buduje graf planarny, wprowadzając jego kolejne krawędzie (być może wraz z nowymi wierzchołkami). Malarz koloruje każdą krawędź natychmiast po jej wprowadzeniu jednym z dwóch kolorów: czerwonym bądź niebieskim. Grę wygrywa Prezenter jeżeli posiada strategię, która niezależnie od przyjętej strategii Malarza, wymusi pojawienie się w prezentowanym grafie monochromatycznej kopii grafu G . W przeciwnym przypadku, grę wygrywa Malarz.

Nazwijmy opisaną powyżej grę *grą ramseyowską w klasie grafów planarnych*. Grytczuk, Hałuszczak i Kierstead [GHK04] postawili następującą hipotezę: w grze ramseyowskiej w klasie grafów planarnych Prezenter ma strategię wymuszającą wystąpienie monochromatycznego grafu G wtedy i tylko wtedy, gdy G jest grafem zewnętrznie planarnym. W pracy [Pet44] Petričková wykazała, że hipoteza ta jest tylko częściowo prawdziwa udowadniając, że w grze na grafach planarnych Prezenter może wymusić nie tylko każdy graf zewnętrznie planarny, ale również pewne grafy, które zewnętrznie planarne nie są.

Pytanie jest następujące: Czy istnieje taki graf planarny G , że w grze na grafach planarnych Malarz posiada strategię unikającą monochromatycznych kopii grafu G ? Pytanie to jest otwarte nawet wówczas, gdy graf G jest kliką na czterech wierzchołkach. Czy może jest tak, że Prezenter może wymusić każdy graf planarny?

Podobne pytania rozważane były już w innych klasach grafów. Dla przykładu, w grze na grafach k -kolorowalnych Prezenter może wymusić każdy graf k -kolorowalny [GHK04], w grze na grafach o liczbie kolorującej co najwyżej $(2d - 1)$ Prezenter może wymusić każdy graf o liczbie kolorującej d [CFS14]. Pomimo iż literatura dotycząca gier ramseyowskich jest już dość bogata, brak jest dotychczas wyników pokazujących nietrywialne strategie dla Malarza. Strategia dla Malarza unikającego klikę K_4 (lub innego grafu planarnego) w grze na grafach planarnych mogłaby być pierwszym takim przykładem.

REFERENCES

- [CFS14] D. Conlon, J. Fox, and B. Sudakov. Short proofs of some extremal results. *Combinatorics, Probability, and Computing*, 23:8–28, 2014.
- [GHK04] J. Grytczuk, M. Hałuszczak, and H. Kierstead. On-line ramsey theory. *The electronic journal of Combinatorics*, 11, 2004. Research Paper R57.
- [Pet44] S. Petričková. Online ramsey theory for planar graphs. *The electronic journal of Combinatorics*, 21, 2044. Paper P1.64.